*I numeri degli dèi. Il circolo vizioso tra discreto e continuo*
Paolo Zellini
Rotary (TS)
05/10/2022

Nella storia della matematica, sosteneva il celebre matematico e statistico russo P.L. Čebyšëv (1821-1894) bisogna distinguere tre grandi periodi, la matematica degli dèi, la matematica dei semidèi, tra cui si possono annoverare scienziati come Newton, Leibniz, Lagrange o Bolzano, e la matematica dei tecnici, che si è sviluppata fin dalla fine del XIX secolo. Ma in che cosa consisteva la matematica degli dèi e che relazione c'è tra i tre periodi di cui parlava Čebyšëv? Rimane ancora oggi qualcosa della scienza degli dèi, o questa ne ha seguito il destino di esilio di cui parlava Heinrich Heine? Teniamo presente questa questione, parlando del rapporto tra discreto e continuo.
La prima apparizione del concetto di continuo nel pensiero greco sembra essersi verificata nell'ambito della scuola eleatica, ma non si può escludere che esso fosse un corollario, più in generale, delle prime filosofie greche dell'epoca tragica, in cui si cercò inizialmente di dimostrare in varie forme che "tutto è uno". L'unità è una prerogativa del continuo.
L'Essere di Parmenide (Fr. 8) è un *plenum* simile a una sfera, intrinsecamente simmetrico, omogeneo, e «neppure divisibile (οὐδὲ διαιρετόν), perché tutto intero è uguale, né c'è da qualche parte un di più che possa impedirgli di essere unito, né c'è un di meno, ma tutto è intero e pieno di essere. Perciò è tutto intero e continuo (συνεχές)». Parmenide non diceva però che l'Essere è infinito; fu Melisso, in compenso, a farlo senza esitazione.
In seguito troviamo osservazioni importanti sul continuo nella *Fisica* di Aristotele. Aristotele afferma che «la mente (νοῦς) è una e continua (συνεχές) nello stesso senso in cui lo è il processo del pensare» (*Sull'anima*, 407 a). E altrove precisa ancora: «è impossibile pensare (νοεῖν) a qualsiasi cosa senza la continuità, o pensare a cose atemporali se non in termini di tempo» (*Parva Naturalia*, 450 a).
Aristotele sostiene anche che il continuo è divisibile, e questo lo distingue nettamente da Parmenide. Il continuo aveva per Aristotele due aspetti in apparenza contrastanti. Da un lato - siamo ormai lontani da Parmenide - era *infinitamente* divisibile, ed era quindi un terreno di potenziale frantumazione (l'accostamento al continuo dell'ἄπειρον, l'indefinito, è particolarmente importante), dall'altro aveva un potere unificante, e serviva a connettere i

termini di una successione. Era quindi conforme a quello che per Aristotele era il suo significato letterale, cioè il "prendere assieme". Un presupposto del continuo era comunque l'idea di successione, il continuo si otteneva da una successione di grandezze che si saldano l'una con l'altra, senza lasciare vuoti intermedi. Del tutto diversa l'idea del continuo come insieme di punti o di numeri maturata dai primi decenni del XIX secolo, da Bernard Bolzano in poi. Ma vale la pena sottolineare questo passaggio: Aristotele lascia intendere, in opposizione a Parmenide, che si deve concepire un continuo divisibile, anzi infinitamente divisibile. La divisione produce il discreto, un insieme di parti staccate. Il continuo sembra allora dover precedere il discreto, e le parti staccate del discreto devono essere saldate tra loro, a loro volta, per ricostituire il continuo. Tuttavia la divisione del continuo non ha quell'effetto distruttivo che sembra implicito nell'idea del taglio, dello sgretolamento e della polverizzazione (pensiamo ai paradossi di Zenone). E non è allora affatto contraddittorio che Aristotele attribuisca al continuo la capacità di unire. Il continuo si divide in infinite parti, ma il *modo* in cui si attua la divisione e il ricongiungimento delle parti, una sorta di alchemico *solve et coagula*, è l'unico strumento che abbiamo a disposizione per conoscere il continuo, per approssimarlo e per costruirlo. Ma come doveva procedere e articolarsi questa divisione? Come dovevano disporsi le parti in modo da dare senso all'operazione di divisione e riconquistare l'unità dell'intero? Una possibile risposta a questa domanda è la seguente: i processi di divisione del continuo possono dar luogo, nei casi più significativi, a processi strutturati di calcolo che generano successioni di numeri che, per la loro struttura e in virtù di speciali teoremi matematici, convergono a qualche cosa, ovvero tendono a un limite che è soluzione dei problemi proposti. Queste successioni sono composte da numeri e da passi successivi staccati l'uno dall'altro e si sviluppano, quindi, nel discreto. Ma esse non esauriscono in nessun modo l'abisso del continuo. Il taglio del numero ha un corrispondente preciso nella dialettica di Platone, che si propone di tagliare o dividere in pezzi il λόγος come si farebbe con una vittima sacrificale.
Aristotele citava la dottrina dei pitagorici, i quali asserivano che l'esistenza del *vuoto* avrebbe la funzione di distinguere gli enti in natura, costituendo una specie di separazione e divisione tra cose che sono disposte una dopo l'altra. Tra queste cose «il primo posto spetta ai numeri, perché è il vuoto che delimita la loro natura» (*Fisica*, 213 b). Nella tradizione pitagorica il discreto per eccellenza, quello dei numeri naturali, era quindi contrassegnato dal vuoto: un fatto che definiva implicitamente la natura del greco ἀριθμός, del numero intero positivo.

Per Aristotele i numeri formavano un insieme discreto. Ma il concetto generale di numero sarebbe cambiato radicalmente, sotto questo aspetto, tra il XVI e il XVII Secolo. Nel corso dei secoli la matematica avrebbe cercato di rappresentare il continuo mediante campi estesi di numeri o punti dello spazio in corrispondenza con tali numeri. Alla fine del XIX secolo si sarebbe definito il campo numerico dei numeri reali come controparte aritmetica del continuo geometrico.
Questo processo dipese anche dallo sviluppo di una concezione puramente analitica della matematica, indipendente dai concetti fisici o intuitivi di tempo, spazio e velocità. I concetti essenziali del calcolo dovevano dipendere da specifiche proprietà di funzioni e dalla natura del calcolo algebrico preso per se stante. Ma la definizione del continuo in termini di insieme di punti o di numeri avrebbe pure generato qualche riserva, qualche critica non trascurabile. Per esempio Poincaré sosteneva che la definizione del continuo (elaborata dai matematici di fine Ottocento), in termini di numeri o di punti, non rispondeva del tutto a quell'idea di saldatura e di compenetrazione delle parti che evita vuoti e lacune e che noi associamo alla nostra intuizione di continuo.

Il rapporto tra discreto e continuo è un aspetto fondamentale del calcolo che interviene nelle operazioni rituali della civiltà vedica del primo millennio a.C., in cui si può forse riconoscere nella sua versione più antica e originale la matematica degli dèi. Di questa matematica si occupano i Trattati della corda (*Śulvasūtra*) e la costruzione di altari di forme geometriche di Agni-Prajāpati descritta in quei trattati. Prajāpati, il Signore delle creature, subisce una divisione, una frantumazione e un indebolimento, a causa della creazione di cui è l'artefice. Ma quali erano le forme degli altari che consentivano la ricostruzione di Prajāpati? E in che rapporti dovevano essere tra loro? I *ṛṣi*, i sette veggenti della tradizione vedica, *videro* per primi la forma degli altari. Ma la continuità presupponeva una sequenza ordinata di gesti, di parole e di costruzioni geometriche, e dunque l'idea del venire una cosa dopo l'altra in una sorta di concatenamento esatto. Scrive Charles Malamoud: «La continuità del sacrificio è la condizione della pienezza del mondo. Il sacrificio senza lacune, il mondo senza fessure, è *ṛta*, il "concatenamento esatto": il procedimento corretto nel lavoro rituale è nello stesso tempo l'immagine e la causa dell'armonioso alternarsi dei giorni e delle notti, del succedersi delle stagioni, della pioggia che cade al momento giusto, dell'ordinato incontro fra mangiatori e mangiati. Sistema di sistemi di parti combacianti: l'ordine cosmico, l'efficacia rituale, la verità come

adeguamento, tali sono le principali componenti del concetto di *ṛta*. Ora, *ṛta*, che è il valore supremo dell'ideologia vedica, si definisce come assenza di mancanza: la parola deriva dalla stessa radice dell'avverbio *aram*, "sufficientemente"».
Non diversamente osservava Sylvain Lévi: «il carattere essenziale del sacrificio è la sua continuità: non si *fa* il sacrificio, lo si *estende* come si tende la trama di una stoffa [. . .]  Perciò tante precauzioni affinché il sacrificio sia "continuo e ininterrotto"!». Ma per essere continuo e ininterrotto il rito sacrificale deve comporre strutture unendo pezzi staccati, fissandoli in una sequenza discreta di azioni, di forme geometriche e di calcoli numerici che mirano all'omogeneità, all'equivalenza e alla soppressione di ogni possibile vuoto o lacuna. Di qui lo studio dell'equivalenza di figure geometriche che intervenivano nella costruzione dell'altare. A calcoli numerici relativamente complessi era affidato, ad esempio, il compito di trovare un circolo equivalente a un quadrato assegnato.
Un problema trattato negli *Śulvasūtra* era l'ingrandimento in scala di figure geometriche L'ingrandimento di un quadrato mediante gnomoni permetteva di congiungere un quadrato più grande con uno più piccolo in una concatenazione geometrica potenzialmente estesa all'infinito. Dunque anche nella costruzione degli altari l'ordine (*ṛta*) doveva possedere speciali caratteristiche di continuità. Gli altari avevano pure un significato cosmologico e la loro disposizione poteva simboleggiare i ritmi del tempo, delle stagioni come dei cicli astronomici su cui si fondavano i calendari.
Dei mattoni che si impilavano secondo speciali figure geometriche si diceva: «voi siete le intime giunture del fuoco» (*The Manava-Srautasūtra*, VI, 1, 8, 8). Forse, scrive Pierre Chantraine, il tema ἀρι- di ἀριθμός, il numero, si può accostare al tema *ri*- del latino *ritus*. Il tema è anche l'esattezza, la verità, la realtà. Una qualsiasi trasgressione, se era dichiarata, diventava meno importante, perché la confessione ristabiliva l'esattezza. Louis Renou osservava che non c'era nulla di più esatto del rito. Di qui il possibile e insostituibile ruolo della matematica.

Ci sono evidenti paralleli con la Grecia, soprattutto per quel che concerne il tema della crescita in scala delle figure. La figura mutava, ma la sua forma doveva rimanere invariata. Basti pensare alla duplicazione del quadrato, trattata da Platone, o di quella del cubo, che è uno dei più complessi problemi tramandatici dalla matematica greca. Di qui proviene pure la natura incrementale delle formule dell'analisi elaborata tra '500 e '600. Le prefigurazioni antiche della dualità di discreto e continuo, implicite in queste costruzioni geometriche,

contribuirono all'elaborazione di schemi di calcolo che sono sopravvissuti immutati fino ai giorni nostri. E gli stessi schemi sono stati decisivi per l'edificazione dell'algebra e dell'analisi dalla fine del '500 in poi, a cominciare dai metodi di risoluzione numerica di equazioni algebriche di grado qualsiasi ad opera di Viète e di Newton.
Tuttavia le misure che intervenivano nella matematica vedica non potevano essere esatte e dovevano essere approssimate con speciali procedimenti nel discreto. Qui comincia a profilarsi un circolo vizioso tra discreto e continuo: da un lato il calcolo sul discreto serve ad approssimare o meglio a costruire il continuo, e deve pertanto considerarsi una condizione prioritaria, l'unica in fondo comprensibile; dall'altro il calcolo sul discreto può apparire come il surrogato di una realtà elusiva e difficile da definire, ma di cui abbiamo una sorta di precognizione. Da un lato il calcolo sul discreto è l'unica cosa che possiamo effettivamente conoscere; ma dall'altro, per capire in che cosa consiste il calcolo sul discreto, noi siamo pressoché obbligati a definire in qualche modo il continuo matematico. Peraltro anche la computazione sul discreto presenta molti lati oscuri.

In tempi più recenti la computazione sul discreto è dovuta soprattutto al calcolo digitale del XX secolo. Questo calcolo era motivato da due principali ragioni: da un lato le ricerche sul concetto di algoritmo e le conquiste dell'informatica teorica, dall'altro la discretizzazione delle equazioni della fisica matematica definite in termini di parametri o variabili che assumono valori nel continuo. Di qui uno scisma all'interno della scienza del calcolo: da un lato gli studi sulla possibilità di definire un modello teorico, generale di calcolo *effettivo* (come la ricorsione o la macchina di Turing), a prescindere da questioni relative all'*efficienza* di calcolo; dall'altro la ricerca di algoritmi per risolvere i problemi computazionali di grandi dimensioni posti dalla matematica applicata. La matematica applicata, a sua volta, divenne una fonte di problemi teorici.
In questa fase il discreto ha preso il sopravvento. Strutture sul discreto, che non trovano un corrispettivo nel continuo e intervengono specialmente nel calcolo matriciale, sono introdotte per aumentare l'efficienza di calcolo. È sempre più appropriata, in questo senso, l'osservazione di Von Neumann che nella modellizzazione matematica del reale intervengono strutture relativamente estranee o lontane dal fenomeno fisico che si vuole simulare. Ed è difficile non notare la maggiore ricchezza di informazione, rispetto al continuo, proveniente dalle strutture matematiche del discreto. Sono queste strutture che rendono

possibile il calcolo su grande scala e la risoluzione di problemi di dimensioni molto elevate.
Il continuo sembra d'altronde sfuggire a una reale comprensibilità, soprattutto per due motivi: il primo è la non numerabilità del continuo dimostrata da Cantor alla fine del XIX secolo con il metodo diagonale, per la quale Émile Borel ebbe a commentare che il continuo contiene elementi non definibili. Il secondo motivo sta nel fatto (dimostrato da Turing), che l'insieme dei numeri calcolabili con una legge, cioè i *numeri computabili*, formano nel complesso un insieme numerabile (quindi di potenza infinitamente inferiore a quella del continuo). Prima di Turing fu Borel, nel 1908, a osservare che i numeri algebrici, che sono calcolabili fino a un grado indefinito di precisione, formano un insieme effettivamente numerabile.
Per concepire il continuo bisognerebbe ammettere successioni, introdotte da L.E.J. Brouwer, di numeri generati per "libera scelta", cioè non regolate da una legge deterministica che imponga un criterio di generazione di numeri non soggetta al nostro arbitrio. Hermann Weyl, che però su questo punto non era interamente d'accordo con Brouwer, sosteneva che il continuo non va concepito come un insieme attuale di punti assegnati, ma piuttosto come *free becoming*, come libero divenire. In molti casi abbiamo a disposizione dei procedimenti di calcolo, degli algoritmi che calcolano la soluzione di un problema (per esempio di un'equazione differenziale, o più semplicemente il calcolo delle cifre un numero irrazionale come $\sqrt{2}$ o $\pi$). Ma ciò che noi riusciamo ad approssimare con un algoritmo, anche se fa parte del continuo, è ben lontano dall'esaurirlo.
Un altro fatto decisivo è che le definizioni che sono servite per edificare una moderna teoria del continuo sono basate sul calcolo nel discreto. Ad esempio il numero reale è concepito come una successione fondamentale, nel senso proposto da Georg Cantor. La definizione di funzione continua e quella di limite, sulla quale poggia tutta l'analisi, si basano su concetti che presuppongono i calcoli sul discreto. È plausibile che una conclusione analoga possa valere, peraltro, anche per la teoria del continuo basata sulla definizione di proporzione dovuta a Eudosso-Euclide (*Elementi*, V libro). Quella definizione sembra presuppone l'esistenza di algoritmi che approssimano per eccesso e difetto un numero irrazionale. Insomma è col calcolo sul discreto che possiamo tentare di definire e di costruire il continuo.
La meccanica dei continui, osservavano infine Hilbert e Bernays, ha come presupposto una costruzione concettuale, in cui si assume che lo spazio sia riempito, in modo continuo, di materia. Tuttavia l'infinità di questo continuo,

senza il quale sarebbe inconcepibile un qualsiasi modello matematico del mondo reale, «non ci è data in nessun modo, ma è interpolata o estrapolata per via di un procedimento intellettuale», noi diremmo un procedimento di natura computazionale.
Queste considerazioni fanno pensare a un possibile rovesciamento di prospettiva, per il quale il discreto non sarebbe un'approssimazione del continuo ma, viceversa, il continuo un'approssimazione del discreto.
Rimane tuttavia un inevitabile *circolo vizioso* tra discreto e continuo. È evidente che senza un'informazione adeguata sulle successioni discrete, e senza le complesse costruzioni formali che ne fanno gli elementi di una nuova aritmetica, non saremmo mai in grado di concepire il continuo. In questo senso il discreto viene *prima* del continuo. Tuttavia la matematica sembra indicare qualcosa che sta al di là dei suoi stessi procedimenti, e che non sarebbe comprensibile in loro assenza. Con una metafora seducente, e con il sospetto che non si tratti solo di metafora, potremmo azzardare l'idea che l'immane smembramento sacrificale del dio di cui parlano i miti e la matematica degli dèi, o la frantumazione di un Essere unitario, perfetto, omogeneo e continuo, è il presupposto necessario per la costruzione di una scienza che ci permetta di conoscerlo e di penetrarne i segreti. In questo senso il continuo potrebbe precedere il discreto.